Научная статья
УДК 517.929
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-142-162

РАЗВИТИЕ ПОДХОДОВ К ЗАДАЧЕ МЫШКИСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМИ

Кирилл Михалович Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

cyril@list.ru; ORCID 0000-0002-7574-793X

Аннотация

Получены достаточные условия устойчивости скалярного линейного неавтономного дифференциального уравнения первого порядка с последействием, явно выраженные через параметры уравнения и усиливающие известные результаты, идущие от классических теорем Мышкиса «о 3/2». Проведено подробное сравнение новых условий устойчивости с известными. Новый подход дает существенно лучшие результаты в применении к уравнениям с одним сосредоточенным запаздыванием и допускает распространение на более широкие классы уравнений.

Ключевые слова и фразы

дифференциальное уравнение, последействие, устойчивость, функция Коши, теорема о 3/2.

Источник финансирования

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект FSNM-2023-0005.

Для цитирования

Чудинов К. М. Развитие подходов к задаче Мышкиса об устойчивости дифференциального уравнения первого порядка с последействием // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 142-162. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-142-162

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 142-162
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 142-162

Development of approaches to the Myshkis problem on the stability of a first-order differential equation with aftereffect

Kirill M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

cyril@list.ru; ORCID 0000-0002-7574-793X

Abstract

We obtain sufficient stability conditions for a scalar linear nonautonomous first-order delay differential equation. The conditions are explicitly expressed in terms of parameters of the given equation, and strengthen the known results coming from the classical Myshkis theorems on 3/2. We provide a detailed comparison of the new stability conditions with existing ones. The new approach yields significantly improved results when applied to equations with a single concentrated delay, and can be extended to broader classes of equations.

Keywords

differential equation, aftereffect, stability, Cauchy function, 3/2 Theorem.

Funding

The research is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Project No. FSNM-2023-0005

For citation

Chudinov K. M. Development of approaches to the Myshkis problem on the stability of a first-order differential equation with aftereffect // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 142-162. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-142-162

Введение

В конце 40-х гг. XX в. А. Д. Мышкис получил [1] условия устойчивости линейного неавтономного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in [0, +\infty) \equiv \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a(t) \geq 0$ и $r(t) \geq 0$: все решения уравнения (1) устойчивы по Ляпунову при условии

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} a(t) \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \leq 3/2,$$

а при выполнении строгого неравенства

$$\varlimsup_{t\to+\infty} a(t) \cdot \varlimsup_{t\to+\infty} r(t) < 3/2$$

и дополнительном условии $a(t) \geq m > 0$ асимптотически устойчивы. Мышкис также показал, что константа 3/2 неулучшаема: строгое неравенство нельзя заменить нестрогим, а в нестрогом нельзя заменить верхние грани верхними пределами.

В международной печати исследовательский интерес к эффективным условиям устойчивости дифференциальных уравнений с последействием проявился к концу 60-х гг. [2, 3] и резко возрос в последние 20 лет XX века. С этого времени поток работ, посвященных этой теме, не оскудевает. Известны обобщения теорем Мышкиса для линейных уравнений с запаздываниями разного вида [4, 5, 6, 7] и некоторых нелинейных математических моделей [3, 8, 9, 10], самостоятельным направлением исследований стал поиск условий устойчивости разностных уравнений с последействием [11, 12, 13], недавно появились продвижения в переносе теорем о 3/2 на векторные уравнения [14].

Настоящая работа посвящена задаче Мышкиса в ее исходной постановке: выразить через параметры уравнения (1) достаточные условия устойчивости его решений. Но хотя в основном содержании статьи мы ограничиваемся исследованием уравнения (1), отметим, что исходным пунктом исследования был следующий. Условия устойчивости в теоремах о 3/2 при переходе от уравнения с одним сосредоточенным запаздыванием (1) к более общим классам уравнений при сохранении неулучшаемости константы 3/2 резко теряют в точности. Впервые на это было обращено внимание в известной работе [8], где было, в частности, показано, что для уравнения

$$\dot{x}(t) + a_1(t)x(t - r_1(t)) + a_2(t)x(t - r_2(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $a_i(t) \geq 0$ и $r_i(t) \geq 0$ для $i = 1, 2$, устойчивость решений по Ляпунову гарантируется условием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} a_1(t) \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r_1(t) + \sup_{t\in\mathbb{R}_+} a_2(t) \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r_2(t) \leq 1,$$

где константу 1 в правой части неравенства нельзя увеличить. Формально обобщающее теорему Мышкиса условие устойчивости

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} (a_1(t) + a_2(t)) \cdot \max_{i\in\{1,2\}} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r_i(t) \leq 3/2,$$

в сущности почти ничего к ней не добавляет. Условий устойчивости, независимо учитывающих влияние разных запаздываний без потери точности, до сих пор предложено не было.

Ситуация, подобная описанной, имела место в исследованиях условий колеблемости решений уравнений с последействием в виде неравенств с другой знаменитой константой в правой части, а именно $1/e$, также впервые указанной Мышкисом в той же работе [1]. Несколько лет назад были найдены такие условия колеблемости всех решений уравнения с несколькими запаздываниями, что влияние каждого запаздывания учитывается независимо — отдельным слагаемым оцениваемого функционала [15]. Точность таких условий существенно выше точности ранее известных. Эти результаты поставили естественный вопрос: имеются ли возможности подобного обобщения теорем о $3/2$?

Мы предлагаем новый подход к получению условий устойчивости уравнений с последействием, который в применении даже к уравнению с одним запаздыванием (1) позволяет получить условия устойчивости, существенно усиливающие известные. К вопросу о возможности применения подхода для получения условий устойчивости уравнений более широких классов (в частности, уравнения (2)) мы возвращаемся в последней части работы.

§ 1. Исходные данные и постановка задачи

1.1 Функция Коши и устойчивость

Ниже везде символ ∞ обозначает $+\infty$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

в следующих предположениях: функцию $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ будем считать локально суммируемой, функцию $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измеримой и положим, что $h(t) \le t$. Ниже будет наложено условие $a(t) \ge 0$, но для определения решения, условий однозначной разрешимости и определения устойчивости это условие не требуется.

Для фиксированного $s \ge 0$ назовем *решением уравнения* (3) *на полуоси* $[s, \infty)$ локально абсолютно непрерывную функцию $x\colon [s,\infty) \to \mathbb{R}$, почти всюду на $[s,\infty)$ удовлетворяющую равенству $\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0$, в котором для $\xi < s$ полагается $x(\xi) = \varphi(\xi)$, где φ — заданная *начальная функция.*

Нетрудно видеть, что при указанных условиях решение уравнения (3) на полуоси $[s,\infty)$ существует и единственно для всякой ограниченной борелевской начальной функции φ и начального условия $x(s) = x_s \in \mathbb{R}$. Здесь

x_s не входит в область определения функции φ и выполнение условия $\lim\limits_{\xi\to s}\varphi(\xi) = x_s$ не требуется (более того, предел не обязан существовать).

Ясные представления об условиях устойчивости уравнения (3), обобщающих теоремы Мышкиса о 3/2, дает работа [16], в которой систематизированы наиболее сильные результаты такого рода в отношении линейного скалярного дифференциального уравнения с последействием общего вида

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(s)\, d_s r(t,s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

с неубывающей по второму аргументу функцией r. Основные результаты работы [16] сформулированы в терминах свойств функции Коши уравнения (4), и мы тоже будем использовать этот аппарат.

Обозначим $\Delta = \{(t,s) \mid t \geq s \geq 0\}$.

Определение 1 ([17, с. 97], [18, с. 84])**.** *Функцией Коши* уравнения (4) называется функция $C\colon \Delta \to \mathbb{R}$, такая что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C(t,s)}{\partial t} + \int_s^t C(\tau,s)\, d_\tau r(t,\tau) = 0, \quad t \geq s; \\ &C(s,s) = 1; \qquad C(\xi,s) = 0, \quad \xi < s. \end{aligned}$$

Свойства функции Коши уравнения (4) подробно изучены [19]. Для дальнейшего изложения достаточно заметить, что при фиксированном втором аргументе s функция $c(\cdot) = C(\cdot, s)$, где C — функция Коши уравнения (3), является решением уравнения (3) на полуоси $[s,\infty)$.

Существуют разные подходы к определению видов устойчивости дифференциального уравнения с последействием; в настоящей работе мы не сопоставляем их. Ограничимся одним замечанием: удобство использования функции Коши определяется наследуемым из теории линейных уравнений без последействия явным представлением решения на полуоси $[s,\infty)$ соответствующего уравнению (4) неоднородного уравнения с правой частью $f\colon [s,\infty) \to \mathbb{R}$ формулой [17, с. 98]

$$x(t) = C(t,s)x_s + \int_s^t C(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq s.$$

Определение 2. Будем называть уравнение (4)

- *равномерно устойчивым*, если для некоторого числа $N > 0$ для всех пар $(t,s) \in \Delta$ имеем $|C(t,s)| \leq N$;
- *асимптотически устойчивым*, если для любого числа $s \geq 0$ имеем $C(t,s) \to 0$ при $t \to \infty$;

- *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $l > 0$, что для любых $s \geq 0$ и $t \geq s + l$ имеем $|C(t,s)| < \varepsilon$;
- *экспоненциально устойчивым*, если для некоторых $N > 0$ и $\gamma > 0$ для всех пар $(t,s) \in \Delta$ имеем $|C(t,s)| \leq N \exp(-\gamma(t-s))$.

Задача дальнейшего исследования — получить достаточные условия устойчивости уравнения (3) в смыслах определения 2, выраженные в явном виде через параметры уравнения и обладающие качествами, указанными во введении.

1.2 Известные положения

Далее везде полагаем $a(t) \geq 0$.

В работе [16] условия устойчивости уравнения (4), обобщающие теоремы Мышкиса, представлены в простом и лаконичном виде, объединяющем в себе все полученные ранее достижения в этом направлении. Приведем основные результаты этой работы применительно к уравнению (3) как частному случаю уравнения (4).

Предложение 1. *Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{h(t)}^{t} a(s)\, ds \leq 3/2, \tag{5}$$

то функция Коши уравнения (3) *ограничена.*

Предложение 2. *Если*

$$\varlimsup_{t \to \infty} \int_{h(t)}^{t} a(s)\, ds < 3/2, \tag{6}$$

то для некоторых $N > 0$ и $\gamma > 0$ функция Коши $C(t,s)$ уравнения (3) *подчинена оценке*

$$|C(t,s)| \leq N e^{-\gamma \int_s^t a(\tau)\, d\tau}, \quad (t,s) \in \Delta. \tag{7}$$

Предложение 3. *Если $\int_0^\infty a(s)\, ds < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T \geq 0$, что для любых $s \geq T$ и $t \geq s$ имеем $|C(t,s) - 1| < \varepsilon$.*

Предложение 4. *Если $\int_0^\infty a(s)\, ds = \infty$ и справедливо* (6), *то уравнение* (3) *асимптотически устойчиво.*

Предложение 5. *Если $a(t) \geq m$ для некоторого $m > 0$ и справедливо* (6), *то уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво.*

Константа 3/2 точна: в предложении 1 нельзя заменить точную верхнюю грань верхним пределом, а в предложениях 2, 4 и 5 — строгое неравенство нестрогим.

1.3 Предварительные результаты

Прежде чем переходить к обобщениям представленных выше результатов, имеет смысл наглядно показать происхождение определяющей точное условие устойчивости константы 3/2. Для этого докажем предложение 1, не претендуя на идейную новизну, но выделяя наиболее принципиальные для дальнейшего моменты.

Обозначим
$$\mu(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \tau, & \tau \in [0,1], \\ 1, & \tau > 1. \end{cases} \tag{8}$$
Заметим, что
$$\int_0^{3/2} \mu(\tau)\, d\tau = 1. \tag{9}$$

Случай сходимости $\int_0^\infty a(s)\, ds < \infty$ малоинтересен (см. предложение 3), поэтому будем считать, что интеграл расходится. В работе [20] показано, что асимптотические свойства функции Коши уравнения (3), в частности ограниченность, не изменяются при изменении коэффициента на суммируемую на полуоси функцию, поэтому можно полагать, что $a(t) > 0$. Приведем уравнение (3) к удобному для нас виду, используя стандартный прием: преобразуем ось времени Ot действием непрерывной возрастающей функции. Пусть время течет со скоростью, пропорциональной коэффициенту $a(t)$: положим $\tau = \tau(t) = \int_0^t a(s)\, ds$ и $y(\tau(t)) = x(t)$. Нетрудно показать [5, 20], что таким образом предложение 1 сводится к утверждению, что все решения уравнения
$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} + y(\psi(\tau)) = 0, \quad \tau \geq 0, \tag{10}$$
где $\psi(\tau) = \psi(\tau(t)) = \int_0^{h(t)} a(s)\, ds$, ограничены при ограниченной начальной функции, если
$$\tau - \psi(\tau) \leq 3/2. \tag{11}$$

Если решение не колеблется (не меняет знак начиная с некоторой точки), то оно не возрастает по модулю, следовательно, ограничено.

Допустим, решение y уравнения (10) колеблется. Тогда достаточно показать, что при выполнении условия (11) для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $\tau_1 \geq 0$, что $y(\tau_1) < 0$, имеем: если $y(\tau) \leq M$ для всех $\tau \leq \tau_1$, то $y(\tau_1) \geq -M$ (случай неравенств обратного знака рассматривается аналогично).

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $\tau_0 = \sup\{\tau \in [0,\tau_1] \mid y(\tau) > 0\}$. Очевидно, $y(\tau_0) = 0$.

В силу уравнения (10) и предположения $y(\tau) \le 1$ для $\tau \le \tau_1$, для $\tau \le \tau_0$ имеем $y'(\tau) \ge -1$, откуда для таких $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, что $\psi(\tau) \le \tau_0$, получаем

$$y(\psi(\tau)) = -(y(\tau_0) - y(\psi(\tau))) = -\int_{\psi(\tau)}^{\tau_0} y'(\xi)\,d\xi = \int_{\psi(\tau)}^{\tau_0} y(\psi(\xi))\,d\xi \le \tau_0 - \psi(\tau),$$

то есть, согласно (8),

$$y(\psi(\tau)) \le \mu(\tau_0 - \psi(\tau)). \tag{12}$$

Остается показать, что если справедливо (11), то $y(\tau_1) \ge -1$. И действительно,

$$\begin{aligned} y(\tau_1) = y(\tau_1) - y(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} y'(s)\,ds = -\int_{\tau_0}^{\tau_1} y(\psi(s))\,ds \\ \ge -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mu(\tau_0 - \psi(s))\,ds = -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mu(\tau_0 + s - \psi(s) - s)\,ds \\ \ge -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mu(\tau_0 + 3/2 - s)\,ds \ge -\int_{\tau_0}^{\tau_0+3/2} \mu(\tau_0 + 3/2 - s)\,ds \\ = -\int_0^{3/2} \mu(3/2 - s)\,ds = -1. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что точность константы 3/2 в условии (11) определилась соотношением (9) и оценкой (12) .

§ 2. Условия равномерной устойчивости

Ниже используется определенная формулой (8) функция μ. Заметим, что при $s > t$ имеем $\mu\left(\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right) = 0$.

2.1 Новое достаточное условие

Теорема 1. *Если для некоторого $t_0 \ge 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t \ge t_0} \int_t^\infty \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds \le 1, \tag{13}$$

то функция Коши уравнения (3) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $s \ge 0$ значения $C(t,s)$ не меняют знак при $t > s$, то очевидно, что они не возрастают с ростом t, следовательно, $0 \le C(t,s) \le 1$.

Зафикируем произвольное $s \geq t_0$ такое, что значения $C(t,s)$ меняют знак при $t \geq s$.

Обозначим $c(t) = C(t,s)$. Функция c есть решение уравнения (3) на $[s,\infty)$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $t_1 \geq s$, что $c(t_1) < 0$, имеем: если $c(t) \leq M$ для всех $t \in [s,t_1)$, то $c(t_1) \geq -M$.

В силу линейности без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $s_0 = \sup\{t \in [s,t_1] \mid c(t) > 0\}$. Очевидно, $c(s_0) = 0$.

Для $t \in [s,s_0]$ имеем:

$$c(t) = -(c(s_0) - c(t)) = \int_t^{s_0} a(u)c(h(u))\,du \leq \int_t^{s_0} a(u)\,du.$$

С учётом оценки $c(t) \leq 1$ получаем: для всех $t \in [s,t_1]$ справедливо неравенство

$$c(t) \leq \mu\left(\int_t^{s_0} a(u)\,du\right). \tag{14}$$

Отсюда получаем

$$c(t_1) = c(t_1) - c(s_0) = -\int_{s_0}^{t_1} a(u)c(h(u))\,du$$
$$\geq -\int_{s_0}^{t_1} a(u)\mu\left(\int_{h(s)}^{s_0} a(\xi)\,d\xi\right)du \geq -1.$$

Аналогично получаем, что если функция $c(t)$ меняет знак при $t \in [s,t_1]$ и $c(t_1) > 0$, то $c(t_1) \leq -\min\limits_{t\in[s,t_1)} c(t)$. Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (3) ограничена. Теорема доказана.

2.2 Вывод предложения 1 из теоремы 1

Предположим, что выполнены условия предложения 1.

Для произвольного $t \geq t_0$ определим на полуоси $[t,\infty)$ функцию

$$\alpha = \alpha(s) = \int_t^s a(\xi)\,d\xi.$$

Для любого $s \geq t$ имеем:

$$\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi = \int_{h(s)}^s a(\xi)\,d\xi - \int_t^s a(\xi)\,d\xi \leq 3/2 - \alpha(s).$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 142-162
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 142-162

Функция α не убывающая, $\alpha'(s) = a(s)$, $d\alpha = \alpha'(s)\,ds = a(s)\,ds$, следовательно, в силу непрерывности либо существует такая точка $t_1 > t$, что $\alpha(t_1) = 1/2$, либо $\alpha(s) < 1/2$ для всех $s \geq t$. В первом случае для любой точки $t_2 \geq t$ получаем:

$$\int_t^{t_2} \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds \leq \int_t^{t_2} \mu\,(3/2 - \alpha(s))\,d\alpha(s)$$
$$= \int_t^{t_1} \mu\,(3/2 - \alpha(s))\,d\alpha(s) + \int_{t_1}^{t_2} \mu\,(3/2 - \alpha(s))\,d\alpha(s)$$
$$= 1/2 + \int_{t_1}^{t_2} (3/2 - \alpha(s))\,d\alpha(s) = 1/2 + \int_0^x (1-y)\,dy \leq 1/2 + 1/2 = 1.$$

Во втором случае то же самое неравенство очевидно.

Таким образом, если выполнено условие (5) предложения 1, то выполнено и условие (13) теоремы 1.

2.3 Преимущества теоремы 1 перед предложением 1

Условия устойчивости как теоремы 1, так и предложения 1 являются оценками интеграла от коэффициента $a(t)$ уравнения (3). Эти условия отличаются, во-первых, выбором множества интегрирования и, во-вторых, наличием в теореме 1 под интегралом весового коэффициента в виде функции μ. Проиллюстрируем влияние каждого из этих отличий на область применимости условий устойчивости.

Пример 1. Положим $a(t) \equiv 1$ и рассмотрим функцию запаздывания

$$h(t) = \begin{cases} t - C, & t \in \mathbb{N}, \\ t, & t \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

где C — положительная константа. Понятно, что:

- решение уравнения (3) с указанными параметрами ведет себя как решение уравнения без запаздывания;
- при достаточно больших C (таких, что $\sup \int_{t-C}^t a(s)\,ds > 3/2$) предложение 1 не выявляет устойчивость уравнения;
- теорема 1 показывает устойчивость для всех $C \geq 0$.

Здесь мера точек, для которых интеграл в предложении 1 больше 3/2, равна нулю, но ясно, что малым изменением уравнения можно сделать ее положительной.

Преимущество теоремы 1 в данном примере определяется отказом от использования интеграла от коэффициента по длине запаздывания и выбором промежутка интегрирования $[t,\infty)$.

Пример 2. Положим $a(t)\equiv 1$ и $h(t)=2n$ для $t\in[2n,2n+2)$, $n\in\mathbb{N}$. Общее решение уравнения (3) с такими параметрами имеет вид

$$x(t)=C(-1)^n(1-(t-2n)),\quad t\in[2n,2n+2),\quad n\in\mathbb{N},\quad C=\mathrm{const}.$$

При этом

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\int_{h(t)}^{t}a(s)\,ds=\int_{2n-2}^{2n}ds=2>3/2,$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\infty)}\int_t^{\infty}\mu\left(\int_{h(s)}^{t}a(\xi)\,d\xi\right)a(s)\,ds&=\sup_{t\in[0,2)}\int_t^{2}\mu\left(\int_0^t d\xi\right)ds\\&=\sup_{t\in[0,2)}[(2-t)\cdot\mu(t)]=(2-1)\mu(1)=1\le 1.\end{aligned}$$

Теорема 1 выявляет устойчивость уравнения, предложение 1 нет.

Здесь причина преимущества теоремы 1 в весовом коэффициенте $\mu(\cdot)$ в подынтегральном выражении.

§ 3. Условия асимптотической устойчивости

В данном разделе исследуем, как можно усиливать условия теоремы 1, чтобы получать новые условия разных видов асимптотической устойчивости.

Будем говорить, что для уравнения (3) выполнено *условие* (A), если

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_t^{\infty}\mu\left(\int_{h(s)}^{t}a(\xi)\,d\xi\right)a(s)\,ds<1.$$

Условие (A) само по себе асимптотической устойчивости уравнения (3) гарантировать не может в силу предложения 3. Не влечет оно, в отличие от неравенства (6), и оценку функции Коши (7).

Пример 3. Положим $a(t)=1$ для $t\in\mathbb{R}_+$. Зададим последовательность

$$0=t_0<s_1<t_1<\ldots<s_i<t_i<\ldots,\quad i\in\mathbb{N},$$

следующим образом: для некоторой константы $C\in(1/2,1)$ положим

$$s_i=t_{i-1}+\ln(i+1),\quad t_i=s_i+C,\quad i\in\mathbb{N};$$

и определим запаздывание

$$h(t) = \begin{cases} t, & t \in [t_{i-1}, s_i), \\ t_{i-1}, & t \in [s_i, t_i). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что условие (A) выполнено:

$$\begin{aligned} \varlimsup_{t\to\infty} \int_t^\infty \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds &= \varlimsup_{t\to\infty} \int_t^\infty \mu(t-h(s))\,ds \\ &= \varlimsup_{i\to\infty} \int_{s_i}^{t_i} \mu(s_i - t_{i-1})\,ds = \varlimsup_{i\to\infty} (t_i - s_i)\mu(s_i - t_{i-1}) \\ &= \varlimsup_{i\to\infty} (t_i - s_i)\mu(\ln(i+1)) = \varlimsup_{i\to\infty} (t_i - s_i) = C < 1. \end{aligned}$$

Пусть $x(0) = 1$. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$ и $t \in (t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$x(t) = \begin{cases} x(t_{i-1})\, e^{-(t-t_{i-1})}, & t \in (t_{i-1}, s_i]; \\ x(s_i) - x(t_{i-1})(t - s_i), & t \in (s_i, t_i]. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x(s_i) - x(t_{i-1})C = x(t_{i-1})e^{-(s_i - t_{i-1})} - x(t_{i-1})C \\ &= x(t_{i-1})(e^{-(s_i-t_{i-1})} - C) = x(t_{i-1})\left(\frac{1}{i+1} - C\right). \end{aligned}$$

Элементы последовательности $\{x(t_i)\}$ — локальные экстремумы функции x. Поскольку $\frac{x(t_i)}{x(t_i - 1)} \to -C$, а $t_i - t_{i-1} \to \infty$ при $i \to \infty$, то функция x убывает медленнее любой экспоненты, и оценка (7) не выполняется.

Далее в этом разделе будем считать, что условие (A) выполнено.

Будем говорить, что для уравнения (3) выполнено *условие* (B), если

$$\int_0^\infty a(s)\,ds = \infty,$$

и *условие* $(B1)$, если для некоторых $t_0 > 0$ и $m > 0$ для всех $t \geq t_0$ имеем $a(t) \geq m$.

Пример 3 показывает, что конъюнкция условий (A) и $(B1)$ не гарантируют экспоненциальной устойчивости, то есть аналог предложения 5 не справедлив. Однако справедлив следующий аналог предложения 4.

Теорема 2. *Если для уравнения* (3) *выполнены условия* (A) *и* (B), *то оно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Достаточно повторить ход рассуждений из доказательства теоремы 1, изменив технические детали.

Если для некоторого фиксированного $s \geq 0$ функция Коши не меняет знак при $t > s$ и выполнено условие (B), то $C(t, s)$ монотонно стремится к нулю с ростом t.

Пусть для данного $s \geq t_0$ для любого $s_0 \geq s$ значения $C(t, s)$ меняют знак при $t \geq s_0$.

Обозначим $c(t) = C(t, s)$. Функция c есть решение уравнения (3) на $[s, \infty)$.

При выполнении условия (A) для некоторых $K < 1$ и $t_1 \geq t_0$ имеем:

$$\sup_{t \in [t_1, \infty)} \int_t^\infty \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\, d\xi\right) a(s)\, ds \leq K.$$

В этом случае для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $t_2 \geq t_1$, что $c(t_2) < 0$, имеем: если $c(t) \leq M$ для всех $t \in [s, t_2)$, то $c(t_2) \geq -KM$. Аналогичный факт устанавливается для $c(t_2) > 0$, а в силу в силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Итак, допустим, что $c(t_2) < 0$ и $c(t) \leq 1$ для всех $t \in [s, t_2)$, и покажем, что тогда $c(t_2) \geq -K$.

Обозначим $s_0 = \sup\{t \in [s, t_2] \mid c(t) > 0\}$. Очевидно, $c(s_0) = 0$.

Как в доказательстве теоремы 1, получаем справедливость оценки (14) для всех $t \leq t_2$, откуда

$$\begin{aligned} c(t_2) = c(t_2) - c(t_0) = \int_{s_0}^{t_2} \dot{c}(s)\, ds = -\int_{s_0}^{t_2} a(s) c(h(s))\, ds \\ \geq -\int_{s_0}^{t_2} a(s) \mu\left(\int_{h(s)}^{s_0} a(\xi)\, d\xi\right) ds \geq -K. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Итак, при условии (A) необходимое для асимптотической устойчивости условие (B) оказывается достаточным, но при этом равномерную асимптотическую устойчивость не гарантирует даже более сильное условие $(B1)$. Чтобы обеспечить равномерную асимптотическую устойчивость, необходимо наложить ограничения на последействие.

Будем говорить, что для уравнения (3) выполнено *условие* (C), если

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_{h(t)}^t a(s)\, ds < \infty.$$

Из теоремы 2.6 работы [21] известно, что условие (C) гарантирует равносильность равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивостей уравнения (3).

Будем говорить, что для уравнения (3) выполнено *условие* $(C1)$, если

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(t-h(t))<\infty.$$

Выполнение условия (B) не влечет связи между условиями (C) и $(C1)$, но условие $(C1)$ следует из конъюнкции условий $(B1)$ и (C).

Теорема 3. *Если для уравнения* (3) *выполнены условия* (A), $(B1)$ *и* $(C1)$, *то оно экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Если для фиксированного s функция $c(t)=C(t,s)$ не меняет знак на полуоси $[s,\infty)$, то в силу условий $(B1)$ и $(C1)$ ее модуль убывает не медленнее экспоненты с показателем $(-m)$.

Предположим, что функция $c(t)$ имеет бесконечно много нулей на полуоси $[s,\infty)$. Рассмотрим последовательность точек

$$s<s_1<t_1<\ldots<s_i<t_i<\ldots,\quad i\in\mathbb{N},$$

где s_i, $i\in\mathbb{N}$, — нули функции x, t_i — точки ее экстремума на отрезках $[s_i,s_{i+1}]$. Из условия $(C1)$ видим, что $t_i\in[s_i,s_i+R]$, следовательно, если $s_i+2R<s_{i+1}$, то на промежутке (s_i+2R,s_{i+1}) модуль функции x убывает, причем в силу условия $(B1)$ — не медленнее экспоненты с показателем $(-m)$. В доказательстве теоремы 2 показано, что условие (A) влечет убывание последовательности $\{|x_i|\}$ к нулю не медленнее геометрической прогрессии, а это с учётом условия $(C1)$ означает, что для некоторого числа $K<1$ имеем $|c(t_{i+1})|\le K\cdot|c(t_i)|$, если $t_i\ge s_{i+1}-R$, и $|c(t_{i+1})|\le K\cdot|c(s_{i+1}-R)|$ в противном случае.

Таким образом, модуль функции c убывает не медленнее экспоненты с показателем $(-m)$ на непустых промежутках (s_i+2R,s_{i+1}) и не менее чем в K раз на промежутках $(\max\{s_{i+1}-R,t_i\},\min\{s_{i+1}+R,t_{i+1}\})$, длины которых не превышают $2R$. Очевидно, что для некоторых чисел $N>0$ и $\gamma>0$, не зависящих от s, для всех $t\ge s$ имеем $|c(t)|\le Ne^{-\gamma(t-s)}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если для уравнения* (3) *выполнены условия* (A), $(B1)$ *и* (C), *то оно экспоненциально устойчиво.*

Для полноты картины покажем, что конъюнкция условий (A), (B), (C) и $(C1)$ не гарантирует экспоненциальной устойчивости уравнения (3).

Пример 4. Зададим последовательность

$$0 = t_0 < s_1 < t_1 < \ldots < s_i < t_i < \ldots, \quad i \in \mathbb{N},$$

так, что

$$s_i - t_{i-1} = i, \quad t_i - s_i = C \in (1,2), \quad i \in \mathbb{N},$$

и определим коэффициент и запаздывание в уравнении (3):

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{i-1}, s_i), \\ 1, & t \in [s_i, t_i); \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} t, & t \in [t_{i-1}, s_i), \\ s_i, & t \in [s_i, t_i). \end{cases}$$

Условие (A) выполнено:

$$\begin{aligned} \varlimsup_{t\to\infty} \int_t^\infty \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds &= \varlimsup_{t\to\infty} \int_t^\infty \mu(t-h(s))\,ds \\ = \varlimsup_{i\to\infty} \max_{t\in[s_i,t_i]} \int_t^{t_i} \mu(t-s_i)\,ds &= \varlimsup_{i\to\infty} \int_{s_i+1}^{t_i} \mu(s_i+1-s_i)\,ds \\ &= \varlimsup_{i\to\infty} (t_i - s_i - 1) = C - 1 < 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что условия (B), (C) и $(C1)$ тоже выполнены.

Пусть $x(0) = 1$. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$ и $t \in (t_{i-1}, t_i]$ имеем

$$x(t) = \begin{cases} x(t_{i-1}), & t \in (t_{i-1}, s_i]; \\ x(s_i)(1-(t-s_i)), & t \in (s_i, t_i]. \end{cases}$$

Отсюда

$$x(s_{i+1}) = x(t_i) = x(s_i)(1-C),$$

при этом промежутки между s_i и s_{i+1} растут к бесконечности.

Уравнение не является экспоненциально устойчивым.

Теорема 4. *Если для уравнения* (3) *выполнены условия* (A) *и* (C), *то для некоторых* $N > 0$ *и* $\gamma > 0$ *его функция Коши* $C(t,s)$ *подчинена оценке* (7).

Доказательство. Если не выполнено условие (B), то утверждение теоремы очевидно. Поэтому далее считаем, что условие (B) выполнено.

Сведем исследование свойств уравнения (3) заменой времени к исследованию свойств уравнения (10), как указано в разделе 1.3. Для уравнения (10) выполнено условие (B1), а следовательно, и условие (C1).

Применяя к уравнению (10) теорему 3, получаем: уравнение экспоненциально устойчиво, если $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \mu(\tau-\psi(\zeta))\,d\zeta < 1$ и $\sup\limits_{\tau\ge 0}(\tau-\psi(\tau)) < \infty$. Но это именно те условия, в которые переходят условия (A) и (C) при переходе от уравнения (3) к уравнению (10), а экспоненциальная устойчивость уравнения (10) соответствует оценке (7) функции Коши уравнения (3). Теорема доказана.

На основе примера 3 нетрудно построить пример, показывающий, что выполнение для уравнения (3) условий (A) и $(C1)$ не влечет оценки (7) его функции Коши. Для этого достаточно сжать промежутки $[t_{i-1}, s_i]$, сделав их ограниченными, и в то же число раз увеличить на этих промежутках коэффициент $a(t)$.

§ 4. Заключительные замечания

1. Сделаем некоторые выводы из предложений 1–5.

Нестрогое неравенство (5) является достаточным условием ограниченности функции Коши уравнения (3), а строгое неравенство (6) не гарантирует асимптотической устойчивости уравнения (3), поскольку предложение 3 указывает, что необходимым условием асимптотической устойчивости является отсутствие суммируемости коэффициента на полуоси. Тем не менее неравенство (6) обеспечивает оценку функции Коши (7), которая позволяет делать выводы об устойчивости уравнения (3) в зависимости от поведения только коэффициента $a(t)$ (но не запаздывания). Конъюнкция неравенства (6) с разными условиями на коэффициент обеспечивает разные виды асимптотической устойчивости: из оценки (7) при отсутствии суммируемости коэффициента на полуоси следует асимптотическая устойчивость, при отделимости коэффициента от нуля — экспоненциальная устойчивость.

2. Сопоставим сказанное выше с новыми результатами.

Теорема 1 усиливает предложение 1, теорема 2 — предложение 4, а теорема 3 и следствие 1 обобщают условия экспоненцальной устойчивости предложения 5 в случае ограниченности последействия.

При использовании условия (A) для формулировки достаточных условий устойчивости уравнения (3) оценка функции Коши (7) не играет такой существенной роли, как при использовании строгого неравенства (6). Это объясняется тем, что в оценке (7) отсутствует функция h, следовательно, эта оценка может характеризовать асимптотические свойства только уравнений, близких по свойствам к уравнениям без запаздываний. Однако теорема 4 позволяет получать оценки решений асимптотически устойчивого уравнения, не являющегося экспоненциально устойчивым.

3. Основная идея примененного в настоящей работе подхода состоит в выражении искомых условий устойчивости через интеграл от коэффициентов уравнения по такому подмножеству полуоси $[t, \infty)$, на котором

коэффициентам соответствуют запаздывания, обращающиеся к отрезку $[0, t]$. Этот подход позволил усилить результаты, систематизированные в работе [16]. Ранее такой интеграл был рассмотрен как альтернатива интегралу по промежутку запазывания $[h(t), t]$ в посвященных исследованиям колеблемости решений линейных неавтономных уравнений с последействием работах [15] (для уравнения с несколькии сосредоточенными запаздываниями) и [22] (для уравнения с запаздыванием общего вида). При таком подходе разные запаздывания учитываются в равной степени. По-видимому, теперь следует применить его в исследовании устойчивости линейных уравнений с последействием общего вида.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность всем участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным и разностным уравнениям, интересовавшимся исследованиями автора и неоднократно посвящавшим время обсуждению результатов и перспектив исследований.

Список литературы

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // *Мат. сб.* 1951. Т. 8, № 3. С. 641–658.

2. *Lillo J. C.* Oscillatory solutions of the equation $y'(x) = m(x)y(x-n(x))$ // *J. Differential Equations.* 1969. V. 6. P. 1–36.

3. *Yorke J. A.* Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations // *J. Differential Equations.* 1970. V. 7. P. 189–202.

4. *Yoneyama T.* On the 3/2 stability theorem for one dimensional delay-differential equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1987. V. 125, N 1. P. 161–173.

5. *Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // *Дифференц. уравнения.* 1992. Т. 28, № 10. С. 1716–1723.

6. *Малыгина В. В.* О точных границах области устойчивости линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // *Изв. вузов. Матем.* 2008. № 7. С. 19–28.

7. *Сабатулина Т. Л.* Об экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения с комплексным коэффициентом и переменным распрелеленным запаздыванием // *Теория управления и математическое моделирование* / Материалы Всероссийской конференции

с международным участием, Ижевск, 13–17 июня 2022 г. Ижевск: Удмуртский университет, 2022. С. 119–121.

8. *Krisztin T.* On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // *Funkcial. Ekvac.* 1991. V. 34. P. 241–256.

9. *Sugie J.* On the stability for a population growth equation with time delay // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 1992. V. 120, N 1-2. P. 179–184.

10. *Азбелев Н. В., Малыгина В. В.* Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием // *Изв. вузов. Матем.* 1994. № 6. С. 20–27.

11. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomus delay difference equation // *J. Difference Equ. Appl.* 1995. V. 1. P. 151–161.

12. *Yu J. S.* Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay // *Comput. Math. Appl.* 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.

13. Malygina V.V., Kulikov A.Y. On precision of constants in some theorems on stability of difference equations // *Funct. Differ. Equ.* 2008. V. 15, N 3–4. P. 239–248.

14. *Егоров А. В.* Метод Разумихина в обобщенной задаче Мышкиса для систем с распределенным запаздыванием // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.* 2023. Т. 19, вып. 2. С. 148–161.

15. *Чудинов К. М.* Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе — Чантурия // *Сиб. мат. журн.* 2020. Т. 61, № 1. С. 224–233.

16. *Малыгина В. В.* Теорема Мышкиса о 3/2 и ее обобщения // *Сиб. мат. журн.* 2023. Т. 64, № 6. С. 1248–1262.

17. *Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

18. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

19. *Максимов В. П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения.* 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 142-162
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 142-162

20. *Малыгина В. В.* Об устойчивости асимптотических свойств решений уравнения с запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 1993. Т. 29, № 8. С. 1324–1329.

21. *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2015. N 65. P. 1–8.

22. *Chudinov K.M.* The Koplatadze—Chanturiya type theorem for linear first-order delay differential equation of general form // *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* 2022. V. 87. P. 53–62.

References

1. *Myshkis, A. D.* On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument // *Mat. Sb.* 1951. N. Ser. 28(70). P. 15–54 (Russian).

2. *Lillo J. C.* Oscillatory solutions of the equation $y'(x) = m(x)y(x-n(x))$ // *J. Differential Equations.* 1969. V. 6. P. 1–36.

3. *Yorke J. A.* Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations // *J. Differential Equations.* 1970. V. 7. P. 189–202.

4. *Yoneyama T.* On the 3/2 stability theorem for one dimensional delay-differential equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1987. V. 125, N 1. P. 161–173.

5. *Malygina V. V.* Some criteria for stability of equations with retarded argument // *Differ. Equ.* 1992. V. 28, N 10. P. 1398–1405.

6. *Malygina V. V.* On the exact boundaries of the stability domain of linear differential equations with distributed delay // *Russian Math. (Iz. VUZ).* 2008. V. 52, N 7. P. 15–23.

7. *Sabatulina T. L.* On exponential stability of a differential equation with complex coefficient and variable distributed delay // *Control Theory and Mathematical Modeling* / Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation. Izhevsk, Russia, 13–17 June, 2022. Izhevsk: Udmurt. University, 2022. P. 119–121 (Russian).

8. *Krisztin T.* On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // *Funkcial. Ekvac.* 1991. V. 34. P. 241–256.

9. *Sugie J.* On the stability for a population growth equation with time delay // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 1992. V. 120, N 1-2. P. 179–184.

10. *Azbelev N V. and Malygina V. V.* On the stability of the trivial solution of nonlinear equations with aftereffect // *Russian Math. (Iz. VUZ).* 1994. V. 38, N 6. P. 18–25.

11. *Erbe L. H., Xia H., and Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomus delay difference equation // *J. Difference Equ. Appl.* 1995. V. 1. P. 151–161.

12. *Yu J. S.* Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay // *Comput. Math. Appl.* 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.

13. *Malygina V. V. and Kulikov A. Y.* On precision of constants in some theorems on stability of difference equations // *Funct. Differ. Equ.* 2008. V. 15, N 3–4. P. 239–248.

14. *Egorov A. V.* Razumikhin approach in the generalized Myshkis problem for systems with distributed delay // *Vestn. St.-Peterbg. Univ. Prikl. Mat. Inform. Protsessy Upr.* 2023. V. 19, Iss. 2. P. 148–161 (Russian).

15. *Chudinov K. M.* On the conditions for oscillation of the solutions to differential equations with aftereffect and generalization of the Koplatadze–Chanturiya theorem // *Siberian Math. J.* 2020. V. 61, N 1. P. 178–186.

16. *Malygina V. V.* The Myshkis 3/2 theorem and its generalizations // *Siberian Math. J.* 2023. V. 64, N 6. P. 1372–1384.

17. *Azbelev N. V. and Simonov P. M. Stability of Differential Equations with Aftereffect.* London: CRC Press, 2002.

18. *Azbelev N. V., Maksimov V. P., and Rakhmatullina L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations* / Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Pub., 1995.

19. *Maksimov V. P.* On the Cauchy formula for a functional differential equation // *Differ. Uravn.* 1977. V. 13. P. 601–606 (Russian).

20. *Malygina V. V.* On the stability of the asymptotic properties of solutions of an equation with delay // *Differential Equations.* 1993. V. 29, N 8. P. 1147–1151.

21. *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2015. N 65. P. 1–8.

22. *Chudinov K.M.* The Koplatadze—Chanturiya type theorem for linear first-order delay differential equation of general form // *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* 2022. V. 87. P. 53–62.

Информация об авторе

Кирилл Михалович Чудинов, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN 1944-6552 AuthorID: 475163

Scopus Author ID 55759745800

Author Information

Kirill M. Chudinov, Candidate of Mathematics, Associate Professor

SPIN 1944-6552 AuthorID: 475163

Scopus Author ID 55759745800

Статья поступила в редакцию 31.08.2025; одобрена после рецензирования 27.10.2025; принята к публикации 21.01.2026

The article was submitted 31.08.2025; approved after reviewing 27.10.2025; accepted for publication 21.01.2026